MC102 – Aula23
Recursão III - QuickSort

Instituto de Computação – Unicamp

12 de junho de 2012

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos um vetor v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenado em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos um vetor v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenado em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha um elemento do vetor especial chamado **pivô**.
  - Particione o vetor em uma posição i tal que todos elementos de *ini* até $i - 1$ são menores ou iguais do que o **pivô**, e todos elementos de i até *fim* são maiores ou iguais ao **pivô**.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $i - 1$ e o outro de i até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que o vetor estará ordenado devido a como foi feito a fase de **divisão**.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha um elemento do vetor especial chamado **pivô**.
  - Particione o vetor em uma posição i tal que todos elementos de *ini* até $i - 1$ são menores ou iguais do que o **pivô**, e todos elementos de i até *fim* são maiores ou iguais ao **pivô**.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $i - 1$ e o outro de i até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que o vetor estará ordenado devido a como foi feito a fase de **divisão**.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha um elemento do vetor especial chamado **pivô**.
  - Particione o vetor em uma posição i tal que todos elementos de *ini* até $i-1$ são menores ou iguais do que o **pivô**, e todos elementos de i até *fim* são maiores ou iguais ao **pivô**.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $i-1$ e o outro de i até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que o vetor estará ordenado devido a como foi feito a fase de **divisão**.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha um elemento do vetor especial chamado **pivô**.
  - Particione o vetor em uma posição i tal que todos elementos de *ini* até $i-1$ são menores ou iguais do que o **pivô**, e todos elementos de i até *fim* são maiores ou iguais ao **pivô**.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $i-1$ e o outro de i até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que o vetor estará ordenado devido a como foi feito a fase de **divisão**.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento **maior que o pivô**.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento **menor ou igual ao pivô**.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento **maior que o pivô**.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento **menor ou igual ao pivô**.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento **maior que o pivô**.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento **menor ou igual ao pivô**.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor *p* como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento **maior que o pivô**.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento **menor ou igual ao pivô**.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim], aux;

  while(ini<fim){
    while( (ini < fim) && (v[ini] <= pivo) ) //para quando encontrar elemento
      ini++;                                //maior que o pivô


    while( (ini < fim) && (v[fim] > pivo) ) //para quando encontrar elemento
      fim--;                               //menor ou igual ao pivô

    if(ini < fim){ //se temos posições válidas, então faz a troca
      aux = v[ini];
      v[ini] = v[fim];
      v[fim] = aux;
    }
  }

  //O laço para quando ini==fim, ou seja checamos o vetor inteiro
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim], aux;

  while(ini<fim){
    while( (ini < fim) && (v[ini] <= pivo) ) //para quando encontrar elemento
      ini++;                                  //maior que o pivô


    while( (ini < fim) && (v[fim] > pivo) ) //para quando encontrar elemento
      fim--;                                 //menor ou igual ao pivô

    if(ini < fim){ //se temos posições válidas, então faz a troca
      aux = v[ini];
      v[ini] = v[fim];
      v[fim] = aux;
    }
  }

  //O laço para quando ini==fim, ou seja checamos o vetor inteiro
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim], aux;

  while(ini<fim){
    while( (ini < fim) && (v[ini] <= pivo) ) //para quando encontrar elemento
      ini++;                                 //maior que o pivô


    while( (ini < fim) && (v[fim] > pivo) ) //para quando encontrar elemento
      fim--;                                //menor ou igual ao pivô

    if(ini < fim){ //se temos posições válidas, então faz a troca
      aux = v[ini];
      v[ini] = v[fim];
      v[fim] = aux;
    }
  }

  //O laço para quando ini==fim, ou seja checamos o vetor inteiro
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim], aux;

  while(ini<fim){
    while( (ini < fim) && (v[ini] <= pivo) ) //para quando encontrar elemento
      ini++;                                 //maior que o pivô


    while( (ini < fim) && (v[fim] > pivo) ) //para quando encontrar elemento
      fim--;                                //menor ou igual ao pivô

    if(ini < fim){ //se temos posições válidas, então faz a troca
      aux = v[ini];
      v[ini] = v[fim];
      v[fim] = aux;
    }
  }

  //O laço para quando ini==fim, ou seja checamos o vetor inteiro
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim], aux;

  while(ini<fim){
    while( (ini < fim) && (v[ini] <= pivo) ) //para quando encontrar elemento
      ini++;                                //maior que o pivô


    while( (ini < fim) && (v[fim] > pivo) ) //para quando encontrar elemento
      fim--;                                //menor ou igual ao pivô

    if(ini < fim){ //se temos posições válidas, então faz a troca
      aux = v[ini];
      v[ini] = v[fim];
      v[fim] = aux;
    }
  }

  //O laço para quando ini==fim, ou seja checamos o vetor inteiro
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) → (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) → (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) → (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) → Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

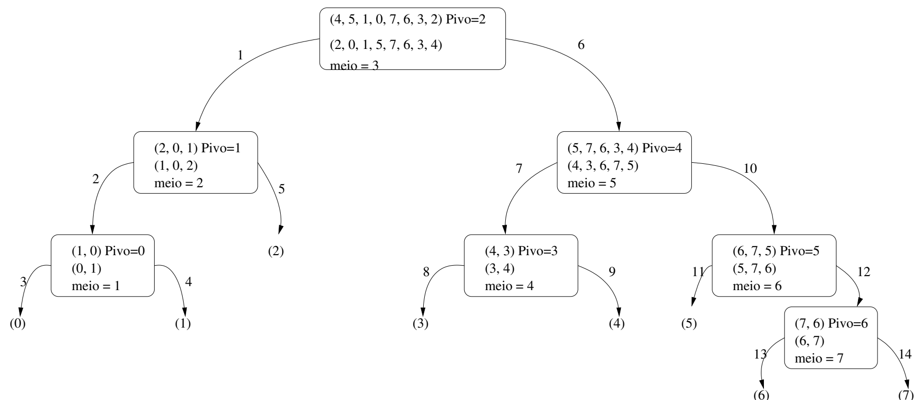
- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort

```
void quickSort(int v[], int ini, int fim){
  if(ini < fim){ //só faz ordenação se tiver pelo
                //menos 2 elementos
    int meio = particiona(v, ini, fim);
    quickSort(v,ini, meio-1);
    quickSort(v,meio, fim);
  }
}
```

Quick-Sort

Abaixo temos um exemplo da árvore de recursão com ordem das chamadas recursivas.



Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
void randomQuickSort(int v[],int ini, int fim){
  int j,aux;
  j = rand()%(fim-ini+1);
  aux = v[fim];
  v[fim] = v[ini+j];
  v[ini+j] = aux;

  if(ini <fim){
    int meio = particiona(v, ini, fim);
    randomQuickSort(v, ini, meio-1);
    randomQuickSort(v, meio, fim);
  }
}
```

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
void randomQuickSort(int v[],int ini, int fim){
  int j,aux;
  j = rand()%(fim-ini+1);
  aux = v[fim];
  v[fim] = v[ini+j];
  v[ini+j] = aux;

  if(ini <fim){
    int meio = particiona(v, ini, fim);
    randomQuickSort(v, ini, meio-1);
    randomQuickSort(v, meio, fim);
  }
}
```

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
void randomQuickSort(int v[],int ini, int fim){
  int j,aux;
  j = rand()%(fim-ini+1);
  aux = v[fim];
  v[fim] = v[ini+j];
  v[ini+j] = aux;

  if(ini <fim){
    int meio = particiona(v, ini, fim);
    randomQuickSort(v, ini, meio-1);
    randomQuickSort(v, meio, fim);
  }
}
```

Random-Quick-Sort

- A chance de ocorrer um caso ruim para o Random-Quick-Sort é desprezível.

Quick-Sort

1. Aplique o algoritmo de particionamento sobre o vetor $(13, 19, 9, 5, 12, 21, 7, 4, 11, 2, 6, 6)$ com pivô igual a 6.
2. Qual o valor retornado pelo algoritmo de particionamento se todos os elementos do vetor tiverem valores iguais?
3. Faça uma execução passo-a-passo do Quick-Sort com o vetor $(4, 3, 6, 7, 9, 10, 5, 8)$.
4. Modifique o algoritmo QuickSort para ordenar vetores em ordem decrescente.